数理解析研究所講究録
144巻 1972年 7-15

in almost homogeneous
Kähler manifolds

東大理 赤尾和男

§1 序

Potters [1] は2次元の場合に、almost homogeneous analytic surface を完全に分類した。それによると、結果は

1) 或る種の rational surfaces. 2) complex torus.

3) elliptic curve 上の topologically trivial $\mathbb{P}^1$-bundle

4) 基本群が可換な Hopf 曲面

であった。これは特に non-Kähler で、$a(S)=0$ の時に、小平先生による曲面の分類の詳しい結果を用いるので直ちには高次元へ拡張できない。一方 上野先生は、

1) 3次元 Kähler almost $\underbrace{\text{homogeneous}}^{\text{regular}}$ ⇒ non-constant meromorphic functions がある。

2) torus T^n 上の $\mathbb{P}^1$-bundle V が almost homog. ⇔ $V = \mathrm{Proj}\, E$

E は T^n 上の flat vector bundle of rank 2

ということを示した。以下では、この後の結果の高次元

への拡張を考える。

§2. 定義といくつかの基本性質

<u>Def.</u> X : compact complex manifold

X が almost homogeneous

$\Longleftrightarrow$ G : complex Lie group が X に biholomorphic に作用していて

$\exists x_0 \in X$. Gx_0 が X で open

上の定義で G は connected と仮定してよい。又上の性質は $n = \dim X$ とする時. $\exists X_1, \cdots, X_n \in H^0(X, \Theta)$ (Θ は X 上の holomorphic ~~tangent vector~~ vector fields の芽の層) $\exists x_0 \in X$ で $X_1, \cdots, X_n$ が点 x_0 で一次独立ということと同値である。

<u>Lemma 1.</u> 上の場合 X の点で G の open orbit に含まれないものの全体 S は X の analytic subset となす。

⊙ $\alpha(x) : \begin{matrix} G & \longrightarrow & X \\ \cup & & \cup \\ g & \longmapsto & gx \end{matrix}$ とすれば, $\alpha(x)$ は

$G \longrightarrow X$ の holomorphic map で

$S = \{ x \in X \mid d\alpha(x) : T_e(G) \longrightarrow T_x(X)$ が surjective でない $\}$. <q.e.d>

Theorem (Remmert - van de Ven)

X : Kähler, almost homogeneous (群 G)

$A(X)$: X の Albanese torus.

$$\alpha : X \longrightarrow A(X)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\circ}(A(X)) \simeq A(X)$$

1) $\alpha, \hat{\alpha}$ は surjective で, α の fibre F は connected, compact almost homog. manifold

2) X は $A(X)$ 上の F を typical fibre とし $\ker\hat{\alpha}$ を構造群にもつ, complex analytic fibre bundle になる。

(証) See Potters [1]

Corollary. 上の Theo. において $q(F) = 0$ (F の ~~image~~ irregularity)

∵ 次の Lemma による.

<u>Lemma</u> V : almost homogeneous, T^m : torus.

$V \longrightarrow T^m$ surj. V が T^m 上の typical fibre が T^r である torus である fibre bundle の構造をもつ

$\Rightarrow$ V は parallelisable solvmanifold.

特に V が Kähler $\Rightarrow$ V は complex torus.

(証) 略.

§3. Almost homogeneous $\mathbb{P}^2$-bundle over T^n

§2 の最後の性質から Kähler almost homog は §の ~~Albanese~~ Albanese torus 上の regular な almost homog. manifold の fiber bundle になることが分る。従って $cq(V) \underset{\text{def}}{\equiv} \dim V - q(V)$ とおくとき、

$$cq(V) = 0 \iff V: \text{ complex torus}$$

$$cq(V) = 1 \iff V \text{ は torus 上の } \mathbb{P}^1\text{-bundle}$$

$$cq(V) = 2 \implies V \text{ は torus 上の或る種の rational surface の bundle}$$

となる。$cq(V) = 1$ の場合は分っているので、以下 $cq(V) = 2$ の場合の一つとして $\mathbb{P}^2$-bundle を考える。

Theorem V : n-dim complex torus T^n 上の $\mathbb{P}^2$-bundle.

V が almost homogeneous

$$\iff V = \operatorname{Proj}(E)$$

ここで E は T^n 上の flat vector bundle of rank 3

(Remark: E は flat ゆえ topologically trivial. 従って それに associate する V も topologically trivial である。$n=1$ なら flat $\Leftrightarrow$ topologically trivial であるが $n \geq 2$ なら 小田先生の例によって $\mathbb{P}^1$-bundle over T^2 で topologically trivial 且 connexion をもたないものがある。)

<u>Lemma 1</u>　$PGL(2)$ の connected subgroup G が $\mathbb{P}^2$ に almost homogeneous に operate している時、その除外集合 S' は次のものに限ってよい。

イ) 一点　ロ) 一直線　ハ) 2直線

ニ) normal crossing をもつ 3 直線　ホ) 2次曲線

☺ 明らか。

(注. G が non-singular quadric C を fix するとき G が C に induce する C の automorphism は $C(\cong\mathbb{P}^1)$ に almost homogeneous に作用する)

<u>Lemma 2</u>　V: T^n 上の $\mathbb{P}^1$-bundle

$$\varphi:\ \mathrm{Aut}^0(V) \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(T^n) \simeq T^n$$

が surjective.

$\Longrightarrow$ V は
1) almost homogeneous であるか 又は
2) V のある2重被覆空間 $\tilde{V}$ が almost homog.

☺ V は T^n 上の $PGL(1)$-flat bundle になる。これから明らか。

<Proof of Theorem>

先ず Borel - Remmert の定理により、homogeneous

ならば V は trivial bundle であり、$E =$ trivial とすればよい。homogeneous でない時は、各 fibre 上で Lemma 1 にあげたどれかを除外集合にもつ。$S' \cap$ Fibre が一点のとき このとき V は section をもつ。更に $\mathrm{Aut}^{\circ}(V)$ はこの section を fix する。section があるから V は $GL(3, \mathbb{C})$-bundle に associate しており

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline * & \alpha \end{array}\right)$$

に structure group が reduce できる。(α は section に対応している) $GL(3, \mathbb{C})$-bundle ξ と $\alpha \otimes \xi$ (α: line bundle) は同じ projective bundle を定めるので結局 V は

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

なる extension で得られる vector bundle E の Proj になる。一方この時 F は section の normal bundle に一致する。section は $\mathrm{Aut}^{\circ}(V)$ で invariant ゆえ F も T^n の ~~base transformation~~ translation で invariant になる。従って (この場合は rank 2 ゆえ) 松島先生の結果から F は T^n 上 flat である。E は flat bundle の flat extension ゆえ flat。よってこの時 Theorem が成り立つ。一般の場合 exceptional set が (i) の時に交点が section を与える。(ii) の時はやはり交

束が T^n の 3重 covering を与え、この上に持ち上げると section をもつ。この時 3点は $\mathbb{P}^2$ で独立な点ゆえ 持ち上げた bundle $\tilde{V}$ は $\mathrm{Proj}(1\oplus\beta\oplus\gamma)$. β, γ : line bundle.
~~且 (α = 1 とは よい 時がう)~~ ($\beta\oplus\gamma \neq$ trivial.) これが 3点を cyclic に動かす automorphism を持ち且 それらと交換する $\tilde{V}$ の automorphism が $\tilde{V}$ 上 almost homog. となるかを見れば、簡単な計算で不可能である事が分る。よって ニ) は起らない。ホ)の時は Lemma の後の Remark により almost homog. $\mathbb{P}^1$-bundle を sub-bundle に含む。これは section をもつので最初に帰着する。最後に ロ) の時、対応する sub $\mathbb{P}^1$-bundle は Lemma 2 の条件を満す。従って section をもつか、又は double cover が section をもつ。従って double cover の場合 上の ニ) の場合と同様に計算すれば不可能であることが示されるのでこれで定理は示された。

注. "$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \xrightarrow[\text{exact}]{} 0$ over T^n

E_i, E : T^n 上の vector bundle. E_1, E_2 flat

$\Rightarrow$ E : flat"

は森本先生の強い結果から従う。但し今の場合 E_2 は rank 2. $E_1 = 1$ ゆえ 実際に extension を計算

する事によっても、E が flat であることが分る。)

§4. Miscellanies.

§3 と同様にして fibre が $\mathbb{P}^3$ の場合も計算できる。この場合は flat vector bundle of rank 4 の Proj では得られないものがある。

更に fibre が一般の rational surfaces の時は、minimalize して Hirzebruch 曲面を考えればよい。

$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$- bundle の時。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

ゆえ 高々 double covering に持ち上げれば、fibre preserving automorphisms 達 structure group を reduce できる。 $\mathrm{Aut}^0(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)\times\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ であり これによって、

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\text{fibre } \mathbb{P}^1"'] \arrow[dr, "\text{fibre } \mathbb{P}^1"] & \\ S_2 \arrow[dr] & & S_1 \arrow[dl] \\ & T^n & \end{tikzcd}$$

S_i は T^n 上の $\mathbb{P}^1$-bundle

という分解が得られる。 S_i は又 almost homog. ゆえ 結局 V は $E_1\oplus E_2$ (E_i : flat vect. b. $/T^n$ of rank 2) に associate する。 quotient の process から $\mathrm{Aut}^0(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$

に reduction できないものは trivial $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$-bundle /(involution) の形であり、それに限ることがいえる。他の Hirzebruch の場合も Base の $\mathbb{P}^1$ を T^n 上の Bundle にして分解できるから同様の結果が成り立つ。

一般に、T^n 上の $\mathbb{P}^r$-bundle V が almost homog

$\Rightarrow$ V は $PGL(r)$-flat であり 特に $r+1$ が prime $\Rightarrow$ V は $Proj$ ($GL(r+1)$-flat vector Bundle) で得られる。

(以上)

Reference [1] J. Potters Inventiones. '69.
[2] Y. Matsushima Nagoya J. '59. vol. 14
[3] A. Morimoto 〃 〃 vol 15.